الموضوع:

ملاحظة: إذا كانت السلسلة التابعية بالشكل $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n(x)$ المتقاربة نقطيًا على E حيث $a_n(x) \geq a_{n+1}(x)$ من أجل $x \in E$ ، $\lim_{n\to\infty} a_n(x) = 0$ يكون:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^k a_k(x)\right| < |a_{n+1}(x)|$$

مثال: ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{x}{n+x^2}$ على المجال $]-\infty, +\infty[$

الحل: من أجل $x=0$ نحصل على السلسلة $\sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0$ متقاربة.

من أجل $x>0$ نحصل على سلسلة متناوبة من الشكل $\sum(-1)^{n-1}\frac{x}{n+x^2}$

لدينا: $a_n(x) = \frac{x}{n+x^2} \geq a_{n+1}(x) = \frac{x}{(n+1)+x^2}$

ولدينا $\lim_{n\to+\infty} a_n(x) = 0$

والسلسلة متقاربة بحسب اختبار لبنتز عندما $x>0$.

من أجل $x<0$ نحصل على السلسلة $\sum(-1)^{n-1}\frac{-|x|}{n+x^2} = \sum(-1)^n\frac{|x|}{n+x^2}$ متقاربة بحسب اختبار لبنتز.

$x<0 \Rightarrow x=-|x| \Rightarrow (-1)^{n-1}\cdot\frac{(-|x|)}{n+x^2} = (-1)^n\cdot\frac{|x|}{n+x^2}$

لندرس التقارب المنتظم:

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty}(-1)^{k-1}\cdot\frac{x}{k+x^2}\right| \leq \left|\frac{x}{(n+1)+x^2}\right| = \frac{|x|}{(n+1)+x^2}$$

لدينا: $\sup_{x\in]-\infty,+\infty[}\frac{|x|}{(n+1)+x^2} = \sup_{x\geq 0}\frac{x}{(n+1)+x^2}$

لنأخذ: $g_n(x) = \frac{x}{(n+1)+x^2} \Rightarrow g_n'(x) = \frac{(n+1)+x^2-2x^2}{((n+1)+x^2)^2}$

$$= \frac{(n+1)-x^2}{((n+1)+x^2)^2} \Rightarrow g_n'(x)=0 \Rightarrow x=\sqrt{n+1} \in [0,\infty[$$

والتابع $g_n(x)$ يبلغ قيمته العظمى عند $x=\sqrt{n+1}$

$$\Rightarrow \sup_{x\in]-\infty,+\infty[} \frac{|x|}{n+x^2} = \frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)+(n+1)} = \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

$$\Rightarrow \sup_{x\in\mathbb{R}} |R_n(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

والسلسلة التابعية متقاربة بانتظام.

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k=(n+1)}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x}{k+x^2}\right| \leq \left|\frac{x}{(n+1)+x^2}\right| = \frac{|x|}{(n+1)+x^2}$$

ط2

جذر $\frac{1}{\sqrt{n+1}}$ $\frac{1}{|x|}$

$$(|x|-\sqrt{n+1})^2 \geq 0$$

$$x^2+(n+1)-2\sqrt{n+1}\,|x| \geq 0$$

$$x^2+(n+1) \geq 2\sqrt{n+1}\,|x| \Rightarrow 1 \geq \frac{2\sqrt{n+1}\,|x|}{x^2+(n+1)}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \geq \frac{|x|}{x^2+(n+1)}$$

نحصل على السابقة

معيار كوشي للتقارب المنتظم للسلاسل التابعية:

تكون السلسلة التابعية $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ متقاربة بانتظام على E إذا وفقط إذا كان من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon>0$ يوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث

$$\forall n,m \in \mathbb{N}\ ;\ m>n>N(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| < \varepsilon;\ \forall x\in E$$

الموضوع:

ملاحظة: لنفي التقارب بانتظام على E لسلسلة التابعية $\sum f_n(x)$، يكفي إيجاد $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي. بحيث من أجل أي عدد طبيعي $N \in \mathbb{N}$ يوجد $n, m \in \mathbb{N}$، $m > n \geq N$، $x \in E$ من أجله يكون:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} f_k(x) \right| \geq \varepsilon$$

مثال: ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x^2)$ على المجال $[0, r]$ حيث $0 < r < 1$.

$\sum \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(1 - \frac{1}{4}\right)$

الحل: من أجل أي $x \in [0, r]$ تكون السلسلة هي سلسلة هندسية أساسها x متقاربة لأن $|x| < r < 1$.

لندرس التقارب المنتظم على $[0, r]$، ليكن $\varepsilon > 0$ عدد حقيقي معطى لنوجد عدد طبيعي $N(\varepsilon)$ بحيث يكون:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} ; m > n > N(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^{m} x^k(1-x^2) \right| < \varepsilon ; \forall x \in [0, r]$$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} x^k(1-x^2) \right| = \left| x^{n+1}(1-x^2) + x^{n+2}(1-x^2) + \dots + x^m(1-x^2) \right|$$

$$= \left| x^{n+1}(1-x^2) \right| . \left| 1 + x + \dots + x^{m-n-1} \right|$$

$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

$$= \left| x^{n+1}(1-x^2) \right| . \left| \frac{1 - x^{m-n}}{1 - x} \right|$$

$$= x^{n+1}(1+x)(1 - x^{m-n})$$

$$\leq r^{n+1} (2)(1) = 2r^{n+1} < \varepsilon$$

لدينا $2r^{n+1} < \varepsilon \Leftarrow r^{n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \Leftarrow (n+1)\ln r < \ln \frac{\varepsilon}{2}$

$$\Rightarrow (n+1) > \frac{\ln \varepsilon/2}{\ln r} \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon/2}{\ln r} - 1$$

$\ln r < 0$ لأن

نختار $N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon/2}{\ln r} \right]$ وبالتالي يتحقق شرط كوشي للتقارب بانتظام

تعريف: ① نقول عن السلسلة التابعية $\sum f_n(x)$ إنها متقاربة مطلقاً إذا كانت السلسلة $\sum |f_n(x)|$ متقاربة.

② نقول عن السلسلة التابعية $\sum f_n(x)$ إنها متقاربة طبيعياً على E إذا كانت سلسلة القيم المطلقة $\sum |f_n(x)|$ متقاربة بانتظام على E.

ملاحظة: إذا كانت $\sum f_n(x)$ سلسلة متقاربة طبيعياً فإنها متقاربة بانتظام

اختبار فايرشتراس:

لتكن $\sum f_n(x)$ سلسلة من التوابع المعرفة على $E \subset R$

ولتكن $\sum M_n$ " عددية ذات حدود موجبة

إذا كان:

$$|f_n(x)| \le M_n \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \; ; \forall x \in E$$

وكانت السلسلة العددية $\sum M_n$ متقاربة فإن السلسلة التابعية $\sum f_n(x)$ تكون متقاربة طبيعياً على E وبالتالي نقول متقاربة بانتظام على E.

مثال: ادرس التقارب المنتظم للسلسلة التوابع $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ على $\mathbb{R}$.

الحل:

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin(nx)|}{n^2} \le \frac{1}{n^2} \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \; ; \forall x \in R$$

بما أن $\sum \frac{1}{n^2}$ سلسلة عددية متقاربة (سلسلة ريمان) وبالتالي حسب اختبار فايرشتراس تكون السلسلة $\sum \frac{\sin(nx)}{n^2}$ متقاربة طبيعياً على R وبالتالي فهي متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$.

2- اختبار ديريخليه للتقارب المنتظم لسلاسل التوابع:

لتكن $\sum f_n(x) \cdot g_n(x)$ سلسلة من التوابع المعرفة على $E \subset \mathbb{R}$ إذا كانت السلسلة $\sum g_n(x)$ تملك مجموع جزئيا نوعا $S_n(x)$ محدود بانتظام على E يعني:

$$|S_n(x)| \leq M \;;\; \forall x \in E \;;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ مطردة (متزايدة أو متناقصة) وتتقارب بانتظام نحو الصفر على E عندئذ:

تكون $\sum f_n(x) \, g_n(x)$ متقاربة بانتظام على E.

3- اختبار آبل للتقارب المنتظم لسلاسل التابعية:

لتكن $\sum f_n(x) \cdot g_n(x)$ سلسلة من التوابع المعرفة على $E \subset \mathbb{R}$ إذا كانت $\sum g_n(x)$ متقاربة بانتظام على E.

وكانت المتتالية التابعية $\{f_n(x)\}$ مطردة ومحدودة بانتظام على E.

عندئذ تكون السلسلة التابعية $\sum f_n(x) \cdot g_n(x)$ متقاربة بانتظام على E.

مثال: ادرس التقارب المنتظم لسلسلة التوابع $\sum \frac{x^n(1-x^2)}{1+n^2 \cdot x^2}$ على المجال $[0, r]$ حيث $0 < r < 1$

الحل: لنضع $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 \cdot x^2}$ و $g_n(x) = x^n(1-x^2)$

لدينا $\sum g_n(x) = \sum x^n(1-x^2)$ متقاربة بانتظام على $[0, r]$ [تمرين سابق].

ولدينا $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 \cdot x^2}$ تحقق:

$$f_n(x) = \frac{1}{1+n^2 \cdot x^2} \geq f_{n+1}(x) = \frac{1}{1+(n+1)^2 \cdot x^2}$$

$$0 \le f_n(x) \le 1 \quad ; \quad \forall x \in [0,2] ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

وحسب اختبار آبل تكون $\sum \frac{x^n (1-x^2)}{1+n^2+x^2}$ متقاربة بانتظام على $[0,2]$.

مبرهنة ٢: لتكن $\sum f_n(x)$ سلسلة من التوابع المعرفة على $E \subset \mathbb{R}$ لنفرض أن جميع التوابع $f_n(x)$ (حيث $n = 1, 2, \ldots$) مستمرة على E وأن السلسلة $\sum f_n(x)$ لتقاربها بانتظام على E. تابع المجموع $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ هو تابع مستمر على E.

مبرهنة ٣: لتكن a نقطة تراكم للمجموعة E ولتكن $\sum f_n(x)$ سلسلة تابعية متقاربة بانتظام على E ولنفرض أنه:

$$\lim_{x \to a} f_n(x) = l_n \quad \text{(موجودة ومحدودة)}$$

وبالتالي:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to 0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum \lim_{x \to a} f_n(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} l_n$$